Hrnečku, vař
aneb
Separace proměnných v české pohádce

Jiří Nečas

Počátkem devadesátých let minulého století jsem se sešel s přítelem teologem, který vyučoval na jedné technické vysoké škole společenské nauky. Při promýšlení náplně pro tento předmět měl zajímavý nápad: použít jako výchozí materiál pohádky.

Základní kurs matematiky se nám na VŠE zredukoval na jeden semestr. Jak jej co nejefektivněji využít? To je téměř nezodpověditelná otázka. Patří do něho aspoň nějaká informace o diferenciálních rovnicích? Pro mne jako teoretika vyučování matematice se nabízí jediná odpověď - do jednosemestrálního kursu se prostě nevejde. Člověk musí jednotlivé pojmy zažít, poznání potřebuje "zrát". Na druhé straně si uvědomuji, že v mém osobním vývoji mělo významnou roli seznámení s Forresterovou systémovou dynamikou. Možnost pomocí diferenciálních[1] rovnic modelovat nejen fyzikální, nýbrž - byť přibližně - i společenské procesy je úžasná. Ekonom musí mít aspoň nějakou informaci, nějaké ponětí o diferenciálních rovnicích! Jak však je jednoduše a efektivně přiblížit?

Použít k tomu pohádku je pokusem najít odpověď.

Jiří Nečas

Karel Jaromír Erben: Hrnečku, vař!

V jedné vsi byla chudá vdova a měla dceru. Zůstávaly v staré chalupě s doškovou roztrhanou střechou a měly na půdě několik slepic. Stará chodila v zimě do lesa na dříví, v létě na jahody a na podzim na pole sbírat a mladá nosila do města vejce na prodej, co jim slepice snesly. Tak se spolu živily.

Jednou v létě stará se trochu roznemohla a mladá musela sama do lesa na jahody, aby měly co jíst; vařily si z nich kaši. Vzala hrnec a kus černého chleba a šla. Když měla hrnec plný jahod, přišla v lese k jedné studánce; tu si k té studánce sedla, vyndala si ze zástěry chléb a začala obědvat. Bylo právě poledne.

Najednou se tu odkud odtud vzala nějaká stará žena, vypadala jako žebračka, a v ruce držela hrneček. "Ach má zlatá panenko," povídá ta žebračka, "to bych jedla! Od včerejška od rána neměla jsem ani kouska chleba v ústech. Nedala bys mi kousek toho chleba?"

"I pročpak ne," řekla ta holka, "chcete-li, třeba celý; však já domů dojdu. Jen nebude-li vám tuze tvrdý?" A dala jí celý svůj oběd.

"Zaplať pánbůh, má zlatá panenko, zaplať pánbůh! - Ale když jsi, panenko, tak hodná, musím ti taky něco dát. Tuhle ti dám ten hrneček. Když ho doma postavíš na stůl a řekneš: "Hrnečku, vař!"[2] navaří ti tolik kaše, co budeš chtít. A když budeš myslit, že už máš kaše dost, řekni: "Hrnečku, dost!"[3] a hned přestane vařit. Jen nezapomeň, co máš říct." - Tu jí ten hrneček podala a najednou ztratila se zas, holka ani nevěděla kam.

Když přišla domů, povídá matce, co se jí v lese přihodilo, a hned postavila hrneček na stůl a řekla: "Hrnečku, vař!" Chtěla zvědět, jestli ji ta žebračka neobelhala. Ale hned se začala v hrnečku ode dna kaše vařit, a pořád jí bylo víc a víc, a co by deset napočítal, byl už hrneček plný. "Hrnečku, dost!" a hrneček přestal vařit.

---

[1] Forresterova systémová dynamika převádí diferenciální rovnice na diferenční, aby se zjednodušilo modelování na počítačích z přelomu šedesátých a sedmdesátých let minulého století.

[2] "Hrnečku vař" znamená nastartování procesu

[3] "Hrnečku dost" znamená ukončení procesu vnějším zásahem

Hned si obě sedly a s chutí se jedly; kaše jako mandle. Když se najedly, vzala mladá do košíčka několik vajec a nesla je do města. Ale musela tam s nimi dlouho na trhu sedět, dávali jí za ně málo, až teprv v samý večer je prodala.

Stará doma nemohla se jí dočkat, už se jí taky chtělo jíst, a měla zas na kaši chuť. Vzala tedy hrneček, postavila ho na stůl a sama řekla: "Hrnečku , vař!" Tu se v hrnečku začala hned kaše vařit, a sotva se stará otočila, byl už plný.

"Musím si taky pro misku a pro lžíci dojít," povídá si stará a jde pro to do komory. Ale když se vrátila, zůstala leknutím jako omráčená: kaše valila se plným hrdlem z hrnečku na stůl, ze stolu na lavici a za lavice na zem. Stará zapomněla, co má říct, aby hrneček přestal vařit. Přiskočila a přikryla hrneček miskou; myslila, že tím kaši zastaví. Ale miska spadla na zem a roztloukla se, a kaše hrnula se neustále dolů jako povodeň. Už jí bylo v sednici tolik, že stará odtud musela do síně utéct; tu lomila rukama a bědovala: "Ach ta nešťastná holka, co to přinesla; já jsem si hned pomyslila, že to nebude nic dobrého!"

Za chvilku tekla už kaše ze sedničky přes práh do síně; čím jí bylo víc, tím jí víc přibývalo. Stará už nevěděla kudy kam, i vylezla v té úzkosti na půdu a pořád bědovala, co to ta nešťastná holka domů přinesla. Zatím bylo kaše pořád víc a víc, a netrvalo dlouho, valila se už jako mračna dveřmi i oknem na náves, na silnici, a kdo ví, jaký by to bylo vzalo konec, kdyby se byla právě naštěstí mladá nevrátila a nekřikla: "Hrnečku, dost!"

Ale na návsi byl už takový kopec kaše, že sedláci, když tudy večer jeli z roboty domů, nikterak nemohli projet a museli se skrze kaši na druhou stranu prokousat.

Pohádka z pochopitelných důvodů celkem opomíjí vlastní proces vaření, speciálně to, jak kaše přibývalo ("a co by deset napočítal, byl už hrneček plný " je integrální údaj, o vlastním průběhu procesu nepřinášející žádnou informaci). Označme y množství uvařené kaše (která, jak ukazuje druhý příklad použití, nemusí být všechna lokalizována v hrnečku), to závisí na čase t, $y = y(t)$. Čas začneme měřit při nastartování procesu příkazem "Hrnečku, vař"; čas při ukončení procesu příkazem "Hrnečku, dost" označme T. Protože během procesu kaše přibývá, pro derivaci y' platí

$$y'(t) \geq 0,$$

přičemž rovnost může nastat jen v izolovaných bodech. Pokusme se nyní pohádku doplnit o pravidlo, jímž by se přibývání kaše v intervalu $\langle 0, T \rangle$ řídilo. Uděláme to hned několika způsoby; můžeme uvažovat, že každý z nich může probíhat v jiném typu kouzelného hrnečku. Symbol k bude ve všech případech označovat kladnou konstantu.

a) *Hrneček Standard*, kaše přibývá lineárně, tedy

$$y' = k.$$

b) *Hrneček Klasik*, kaše přibývá v souladu s klasickým modelem růstu, čím více kaše, tím rychleji přibývá:

$$y' = ky.$$

c) *Hrneček Infraklasik*, jakýsi kompromis mezi předchozíma dvěma, tedy mezi lineárním a exponenciálním růstem:

$$y' = ky^r,$$

kde r leží mezi 0 a 1. Abychom se neutápěli v přílišné obecnosti, zvolme $r = 1/3$, tedy

$$y' = ky^{1/3}.$$

d) *Hrneček Ultraklasik* má v sobě zabudováno úsloví "S jídlem roste chuť", čím více je kaše, tím rychleji se množí (dost připomíná snění některých liberálních ekonomů o růstu HDP):

$$y' = ky^r,$$

kde $r > 1$. I tady pro jednoduchost zvolíme určitou hodnotu, a to $r = 2$, tedy

$$y' = ky^2.$$

e) *Hrneček Retard* má v sobě zabudované určité brzdicí zařízení, takže přírůstek kaše je nepřímo úměrný množství kaše již uvařené:

$$y' = k/y.$$

f) Konečně *hrneček Logist* také růst kaše zpomaluje. Při malých množstvích funguje téměř jako klasik, avšak pak se začne projevovat, že i pohádkový svět může být konečný, takže se zde uplatní činitel vyjadřující "velikost prostředí" či "velikost systémového okolí"; bez kaše by jeho hodnota byla b, množství uvařené kaše je třeba od něho odečíst, tedy

$$y' = ky(b - y).$$

Jak již jsme zmínili, k vyjadřuje kladnou konstantu. Ta je charakteristikou příslušného kouzelného hrnečku. V posledním případě se setkáváme ještě s další, můžeme říci vnější konstantou b, která se týká vlastností světa, v němž kouzelný proces probíhá.

Chování všech typů hrnečku od nastartování do ukončení procesu máme popsána diferenciální rovnicí prvního řádu, řešitelnou metodou separace proměnných. V jednotlivých případech dostaneme obecná řešení:

a) $y_{\mathrm{St}} = kt + C$;

b) $y_{\mathrm{Kl}} = C\,\mathrm{e}^{kt}$;

c) $y_{\mathrm{IKl}} = (k_1 t + C)^{3/2}$, kde $k_1 = 2k/3$;

d) $y_{\mathrm{UKl}} = (C - kt)^{-1}$;

e) $y_{\mathrm{Re}} = (k_3 t + C)^{1/2}$, kde $k_3 = 2k$;

f) $y_{\mathrm{Lo}} = bC\mathrm{e}^{kt} / (1 + C\mathrm{e}^{kt}) = bC / (C + \mathrm{e}^{-kt})$.

Podívejme se nyní, jaký průběh má přibývání kaše v jednotlivých případech. Budeme se při tom snažit konstantu C vyjádřit pomocí počátečních podmínek.

Základnímu líčení pohádky odpovídá představa, že na začátku procesu, tedy pro $t = 0$, je $y = 0$. Tuto podmínku použijeme pro případy a, c, a e; v případech b, d a f však by znamenala, že množství kaše by zůstávalo nulové, což by bylo v rozporu se záměrem pohádky, a tak nám nezbývá, než podmínku poněkud pozměnit (případ d by potřeboval poněkud podrobnější rozbor, kterým by se však naše zamyšlení stávalo méně čtivým, srov. pozn. 4).

V případech, kdy pro $t = 0$ je $y = 0$, dostáváme:

a) $y_{\mathrm{St}} = kt$ (Standard)

c) $y_{\mathrm{IKl}} = k_2 t^{3/2}$, kde $k_2 = k_1^{3/2}$ (Infraklasik)

e) $y_{\mathrm{Re}} = k_4\, t^{1/2}$, kde $k_4 = k_3^{1/2}$ (Retard)

Ve všech těchto třech případech je množství kaše y vyjádřeno rostoucí funkcí času t, mající v nekonečnu limitu nekonečno, přičemž mezi nimi nejrychlejší růst probíhá v Infraklasiku, pomalejší ve Standardu a nejpomalejší v Retardu.

Má-li hrneček fungovat i ve zbývajících případech, musíme zde předpokládat, že při nastartování procesu v čase $t = 0$ zde jakési "zárodečné množství" h kaše je ($h > 0$), ať už je zajistí samo kouzlo, či třeba -zcela prozaicky - nedokonalé umytí po předchozím použití.

Řešení pak mají tvar:

b) $y_{\mathrm{Kl}} = h\, \mathrm{e}^{kt}$ (Klasik)

d) $y_{\mathrm{UKl}} = (h^{-1} - kt)^{-1} = h/(1 - hkt)$ (Ultraklasik)[4]

f) $y_{\mathrm{Lo}} = bh \,/\, (h + (b - h)\, \mathrm{e}^{-kt})$ (Logist)

V případě Klasiku (b) se setkáváme s exponenciálním růstem, jde o růst ještě rychlejší než v případě Infraklasiku, opět však o něm platí, že v nekonečnu má limitu nekonečno.

[4] Poslední vyjádření má smysl i pro $h = 0$, v tomto případě jde o funkci identicky rovnou nule.

Věnujme nyní pozornost hrnečku Logist. y je spojitou rostoucí funkcí argumentu t na celém intervalu <0, +∞) (formálně dokonce na celém $\mathcal{R}$, jenže záporné hodnoty argumentu t nemají pro nás smysl), která v nekonečnu má konečnou limitu rovnou b. Jde zde o tzv. *logistickou růstovou funkci*, která je nejjednodušším matematickým modelem růstu, kdy původně zdánlivě exponenciální růst začne být brzděn tím, že pro rostoucí veličinu začne "být těsno", přestože limitní hodnota této rostoucí funkce je v +∞ konečná.

Ještě zajímavější je růst v případě Ultraklasiku. Z popisu hrnečku je patrno, že by zde mělo jít o růst rychlejší než exponenciální. Co to však zde znamená? Rozdíl ($1/h - kt$) musí být kladný, tedy $t < 1/(hk) = T_{max}$, jinými slovy, pro naše zadání musí t ležet v intervalu <0, T_{max}), přičemž na jeho pravém kraji, tedy už v konečném čase, roste y_{UKl} k nekonečnu, což znamená, že ke kolapsu v případě nezastavení procesu příkazem "hrnečku, dost" musí dojít už "v dohlednu", tj. v některém čase $t < T_{max}$.

Pohádkový hrneček je jistě dobrá a užitečná věc, ale musí se s ním umět zacházet. Který typ je nejlepší? To ať si čtenář odpoví sám podle svého vkusu. Všechny potřebují umět použít příkaz "Hrnečku, dost". Morální dotažení se nabízí[5], my však zůstaňme v prostoru vymezeném pohádkou a matematikou.

Kromě Ultraklasiku a Logistu u všech popisovaných hrnečků platí, že (při nepoužití ukončovacího příkazu "Hrnečku, dost") pro t -> +∞ roste k +∞ i hodnota funkce y. Vzniká zde prostor k porovnávání rychlosti růstu, tj. k hledání limity podílu funkcí pro t -> +∞ . V pohádkovém světě by třeba nemusela existovat mez pro množství kaše, v reálném světě však taková mez existuje, a i ona ves z naší pohádky má konečné rozměry, a tedy zřejmě i konečné kaše-absorpční schopnosti. V realitě neomezený růst není možný. Kde je jeho hranice, to záleží na možnostech světa i na konstantě k. Jaké ony skutečné možnosti světa jsou, nejsme zpravidla s to říci, a často se v zákonitostech vyjádřených diferenciálními rovnicemi setkáváme s konstantami, jež jsme s to jen velmi přibližně odhadnout. Přesto pro rozhodování mohou být velmi cenné i jen kvalitativní výsledky, tedy informace o tom, jak vypadá průběh funkce, která je výsledkem diferenciální rovnice. Zajímá nás především, kde je pravý konec jejího definičního oboru (zda ve vlastním bodě či v nekonečnu) a jaké je její chování v jeho okolí, tedy zda roste nade všechny, osciluje, blíží se k nějaké konkrétní hodnotě apod.

Logist nepřipouští neomezený růst, obor hodnot funkce y_{Lo} je shora omezen konstantou b. Avšak i zde můžeme předpokládat, že dlouho před přiblížením se této limitní hodnotě začne být v prostředí zamořeném kaší hodně těsno, a tedy je dobré ani v tomto případě na ukončovací příkaz "Hrnečku, dost" nezapomenout.

Pro Ultraklasik definiční obor končí[6] v bodě T_0. Zde máme zaručeno, že při ignorování prostředku k zastavení procesu dojde ke kolapsu ještě v konečném čase.

---

[5] Podobnost s růstem HDP není čistě náhodná.

[6] Formálně je maximálním přípustným definičním oborem funkce y_4 množina $\mathcal{R} - \{T_0\}$, tvořená dvěma disjunktními otevřenými intervaly $(-\infty, T_0)$, $(T_0, +\infty)$;

Z pohádkového světa pohádek jsme přešli do ještě pohádkovějšího světa matematiky. Vzájemné propojování světů, v nichž se pohybujeme, může pomoci prožívat hlubinu našeho bytí, překračující meze materiálního světa. A jedním možným krůčkem v tomto směru je otevřít diferenciálním rovnicím dveře, aby nezůstaly uvězněny v "mundu symboliku"[7], nýbrž aby se dotýkaly našeho lidského uvažování o okolním světě, a třeba i o věcech jej překračujících.

Literatura

Erben, K. J.: Hrnečku, vař! http://www.cist.cz/Pohadky/hrnecku.htm

Forrester, J. W.: Principles of Systems. Cambridge, Mass - London, MIT 1982

Henzler, J. aj.: Matematika pro ekonomy. Praha, Oeconomica 2007. ISBN 978-80-245-1284-6

Kaňka, M. - Henzler, J.: Matematika 2. Praha, Ekopress 2003. ISBN 80-86119-77-7

Kaňka, M. - Coufal, J. - Klůfa, J.: Učebnice matematiky pro ekonomy. Praha, Ekopress 2007. ISBN 978-80-86929-24-8

Batíková, B. aj.: Matematika pro 4MM101. Praha, Oeconomica 2006. ISBN 80-245-1097-9

Nečas, J. (ed.): Aplikovaná matematika. (Oborové encyklopedie SNTL, 2 sv.) Praha, SNTL 1977, 1978

Psáno pro "Mundus Symbolicus"

řešení diferenciální rovnice s danou počáteční podmínkou musí být podmnožinou toho intervalu, jehož se počáteční podmínka týká, v našem případě intervalu $(-\infty, T_0)$, neboť v něm leží 0. I zmíněný požadavek, aby platila nerovnost $y' \geq 0$, se týká jen tohoto intervalu.

[7] Ve světě symbolů